§5 Folgerungen aus der Struktur der nicht-parametrischen Minimalflächengleichung

In diesem Abschnitt studieren wir das Verhalten von C^2 (und damit reell analytischen) Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung

$$(1) \quad \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0$$

auf Gebieten in $\mathbb{R}^2$. Es handelt sich bei (1) um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung, für die man trotzdem eine Reihe aus der Theorie der linearen elliptischen Gleichung zweiter Ordnung bekannten Sätze nachmachen kann. Dazu gehören insbesondere sogenannte Maximum-Prinzipien, wo man die Größenordnung der Lösung auf einem Gebiet Ω durch das Verhalten der Randwerte beschreibt. Für einen allgemeinen Zugang vergleiche man etwa das ausgezeichnete Buch von Gilbarg & Trudinger in den Springer Grundlehren. Andererseits impliziert gerade die Nichtlinearität von (1) eine Reihe verblüffender Aussagen: neben dem Bernstein Satz hat man ein Theorem über die Hebbarkeit isolierter Punkte, d.h. gilt (1) nur auf einem punktierten Bereich, so kann man f glatt über den möglichen singulären Punkt hinaus fortsetzen.

SATZ 5.1 : (Maximum-Prinzip)

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ der Minimalflächengleichung (1) auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Es gelte $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

i) $f \leq g + M$ auf $\partial\Omega$ für ein $M \in \mathbb{R} \Longrightarrow f \leq g + M$ auf Ω.

ii) $m + f \leq g$ auf $\partial\Omega$ für ein $m \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$
$m + f \leq g$ auf Ω.

<u>KOROZZAR</u>: Das Dirichletproblem zur Minimalflächengleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ hat – wenn überhaupt – nur eine Lösung, d.h.: gibt man eine stetige Funktion $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ vor, so gibt es höchstens eine Funktion $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit (1) und $f|_{\partial\Omega} = \phi$ (Dirichlet'sche Randbedingung).

<u>Anmerkung</u>: Das Korollar sagt natürlich gar nichts darüber aus, ob man zu gegebener Randfunktion ϕ lösen kann. Diese Diskussion ist viel schwerer und wird später geführt.

<u>Beweisskizze von Theorem 5.1</u>: Wir beschreiben hier eine Vorgehensweise, nämlich die Wahl geeigneter Testfunktionen, die in der allgemeinen Theorie partieller Differentialgleichungen sehr geläufig ist.

Multipliziert man die Gleichungen (1) für f und g mit einer glatten Funktion Ψ, die auf $\partial\Omega$ verschwindet, so folgt nach Integration über Ω und Anwendung des Gaußschen Satzes nach Subtraktion der resultierenden Identitäten

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) \cdot \nabla \Psi \, dx .$$

Ist $f \leq g + M$ auf $\partial\Omega$, so wählt man

$$\Psi := \max(0, f - g - M).$$

Diese Funktion gehört zu $C^0(\overline{\Omega})$ mit $\Psi = 0$ auf $\partial\Omega$, allerdings ist Ψ im allgemeinen nur Lipschitz stetig. Als Lipschitz Funktion ist Ψ immerhin noch in fast allen Punkten differenzierbar mit

$$\nabla \Psi = (\nabla f - \nabla g) \cdot \chi_{[f > g+M]}$$

fast überall, wo $\chi_{[f>g+M]}$ die charakteristische Funktion der Menge $\{x \in \Omega : f(x) > g(x) + M\}$ bedeutet. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen beweist man durch Einführen geeigneter Räume, daß unser Ψ tatsächlich in obiger Integralidentität zugelassen ist, es folgt

$$0 = \int_{[f>g+M]} (\nabla f - \nabla g) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) dx .$$

Andererseits ist für $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$(p-q) \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}} \right) = \qquad \big(\phi(t) = q + t(p-q)\big)$$

$$(p-q) \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} \left((1+|\phi(t)|^2)^{-1/2} \phi(t) \right) dt =$$

$$\int_0^1 (1+|\phi(t)|^2)^{-1/2} |p-q|^2 + \big((p-q)\cdot\phi(t)\big) \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot \big((p-q)\cdot\phi(t)\big)$$

$$\cdot (1+|\phi(t)|^2)^{-3/2} \quad dt =$$

$$\int_0^1 (1+|\phi(t)|^2)^{-1/2} |p-q|^2 - \big[(p-q)\cdot\phi(t)\big)^2 (1+|\phi(t)|^2)^{-3/2} dt =$$

$$\int_0^1 (1+|\phi(t)|^2)^{-3/2} \cdot \left\{ (1+|\phi(t)|^2) \cdot |p-q|^2 - \big((p-q)\cdot\phi(t)\big)^2 \right\} dx \geq$$

$$\geq \int_0^1 \left(1+|\phi(t)|^2\right)^{-3/2} dt \cdot |p-q|^2 .$$

Also ist der Integrand in $\int\limits_{[f>g+M]} \ldots$ stets ≥ 0, und das Verschwinden des Integrals bedeutet demnach

$$(\nabla f - \nabla g) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) = 0$$

fast überall auf der Menge $[f>g+M]$. Dies wiederum ist nach der vorstehenden Abschätzung gleichwertig mit

$$\nabla f(x) = \nabla g(x)$$

auf $[f>g+M]$, also $\nabla \Psi = 0$ f.ü. Ψ hat Randwerte 0 auf $\partial\Omega$ und wie bei glatten Funktionen gilt auch hier die Folgerung $\Psi = 0$, also $f \leq g+M$ auf Ω. $\blacksquare$

<u>Präziser Beweis von Satz 5.1:</u> Wir folgen dem "Vergleichssatz für quasilineare Gleichungen" aus Gilbarg & Trudinger, Theorem 9.2.

Sei Q der folgende Differentialoperator

$$Q u := \Delta u - \sum_{i,j} \left(1+|\nabla u|^2\right)^{-1} \partial_i u \, \partial_j u \; \partial_i \partial_j u .$$

Offenbar ist $Qu = 0$ gleichwertig mit der nichtparametrischen Minimalflächengleichung (1).

Wir nehmen an:

$$u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad Qu \geq Qv \text{ auf } \Omega,$$

(2) $\quad u \leq v$ auf $\partial\Omega$

und wollen zeigen

(3) $\quad u \leq v$ auf Ω.

Hieraus ergeben sich schnell (durch passende Wahlen von u, v) die Aussagen des vorstehenden Satzes.

Es ist nach (2)

$$0 \leq Qu - Qv = \Delta(u-v) - \sum_{i,j} (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \, \partial_j u \, \partial_i \partial_j u$$

$$+ \sum_{i,j} (1+|\nabla v|^2)^{-1} \partial_i v \, \partial_j v \, \partial_i \partial_j v$$

$$= \Delta(u-v) - \sum_{i,j} (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \, \partial_j u \cdot \{\partial_i \partial_j u - \partial_i \partial_j v\}$$

$$+ \sum_{i,j} \{(1+|\nabla v|^2)^{-1} \partial_i v \, \partial_j v - (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \, \partial_j u\} \, \partial_i \partial_j v$$

$$= \sum_{i,j} \left[\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \, \partial_j u}{1+|\nabla u|^2} \right] \partial_i \partial_j (u-v)$$

$$+ \sum_{i,j} \{(1+|\nabla v|^2)^{-1} \partial_i v \, \partial_j v - (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \, \partial_j u\} \, \partial_i \partial_j v.$$

Seien $\quad a_{ij}(\xi) := \delta_{ij} - \dfrac{\xi_i \xi_j}{1+|\xi|^2}, \quad w = u - v.$

Dann lautet unser Ergebnis:

$$0 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) \cdot \partial_i \partial_j w$$

$$+ \sum_{i,j} \{a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v)\} \partial_i \partial_j v .$$

Mit geeigneten stetigen Funktionen $\vartheta_{ij} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist

$$a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v) = \vartheta_{ij} \cdot (\nabla u - \nabla v)$$

$$\Big(\quad a_{ij}(p) - a_{ij}(q) = \int_0^1 \frac{d}{dt} a_{ij}(q + t(p-q))\, dt = (p-q) \cdot \int_0^1 (\operatorname{grad} a_{ij})(q + t(p-q))\, dt$$

$$\Longrightarrow \quad a_{ij}(\nabla u(x)) - a_{ij}(\nabla v(x)) = \int_0^1 (\operatorname{grad} a_{ij})(\nabla v(x) + t(\nabla u(x) - \nabla v(x)))\, dt \cdot (\nabla u(x) - \nabla v(x)),$$

$$\vartheta_{ij}(x) := \int_0^1 (\operatorname{grad} a_{ij})(\nabla v(x) + t \cdot (\nabla u(x) - \nabla v(x)))\, dt \qquad \Big),$$

also:

$$\sum_{i,j} \{a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v)\} \partial_i \partial_j v =$$

$$\sum_{i,j} \vartheta_{ij} \cdot (\nabla u - \nabla v)\, \partial_i \partial_j v =$$

$$\sum_k \Big(\sum_{i,j} \partial_i \partial_j v \cdot \vartheta_{ij}^k \Big) \partial_k w .$$

Setzt man noch

$$b_i(x) := \sum_{l,j} \partial_l \partial_j v(x) \cdot \vartheta^i_{lj}(x),$$

so bekommen wir die Differentialungleichung

$$(4) \qquad 0 \leq \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i \partial_j w + \sum_i b_i \cdot \partial_i w =: L(w).$$

Die Koeffizienten b_i sind per Definition lokal beschränkte, stetige Funktionen auf Ω, und gemäß (2) haben wir die Zusatzinformation $w \leq 0$ auf $\partial\Omega$.

Zum Nachweis der Behauptung (3) nehmen wir indirekt an, daß w im Inneren von Ω einen positiven Wert annimmt. $w|_{\partial\Omega} \leq 0$ heißt dann:

$$\sup_\Omega w > 0 ,$$

und es gibt $x_0 \in \Omega$ mit

$$w(x_0) = \sup_\Omega w .$$

Insbesondere ist $\nabla w(x_0) = 0$ und $\left(\partial_i \partial_j w(x_0)\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$

negativ semidefinit, also $L(w)(x_0) \leq 0$. Mithin bekommt man

sofort einen Widerspruch, wenn man $Q(u) \geq Q(v)$ durch die stärkere Bedingung „$>$" ersetzt, was sich dann in $L(w) > 0$ niederschlägt.

Wie argumentiert man im allgemeinen Fall?

Sei D ein kompakt in Ω enthaltenes Teilgebiet. Sämtliche Koeffizienten des Differentialoperators L sind auf $\overline{D}$ stetig, also insbesondere auch beschränkt. Für das Gebiet Ω ist das nicht klar, denn u, v liegen nur in $C^2(\Omega)$ und nicht in $C^2(\overline{\Omega})$. Man findet jetzt $\lambda > 0$, $b_0 > 0$ mit

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j$$

für alle Vektoren ξ und Punkte $x \in \overline{D}$ und:

$$\sup_{\overline{D}} |b| \cdot \lambda^{-1} \leq b_0 .$$

Mit $\gamma > 0$ folgt (beachte $a_{11} \geq \lambda$)

$$L(e^{\gamma x_1}) = (\gamma^2 \cdot a_{11} + \gamma \cdot b_1) \cdot e^{\gamma x_1}$$
$$\geq \lambda(\gamma^2 - \gamma \cdot b_0)\, e^{\gamma x_1}$$

auf D, und wählt man γ genügend groß, so ist offenbar

$$L(e^{\gamma \cdot x_1}) > 0 \quad \text{auf } D.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ bekommt man

$$L(w + \varepsilon \cdot e^{\gamma x_1}) > 0 \quad \text{auf } D,$$

und daraus schließt man für $w_\varepsilon := w + \varepsilon \cdot e^{\gamma x_1}$:

$$\sup_{\overline{D}} w_\varepsilon = \sup_{\partial D} w_\varepsilon .$$

Würde nämlich $\sup_{D} w_\varepsilon$ in einem Punkt $x_0 \in D$ angenommen, so hätte man dort wie vorhin ja $L(w_\varepsilon)(x_0) \leq 0$.

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ impliziert das Randmaximumprinzip aber

$$\sup_{D} w = \sup_{\partial D} w .$$

Schließlich wählt man für D eine Ausschöpfung von Ω (also eine Folge $D_\nu \subset D_{\nu+1}$, $D_\nu \subset\subset \Omega$, $\bigcup D_\nu = \Omega$), die Stetigkeit von w bis zum Rand von Ω liefert:

$$\sup_{\overline{\Omega}} w = \sup_{\partial\Omega} w \leq 0,$$

und genau das wahr zu zeigen.

BEMERKUNGEN: 1) Die vorstehenden Rechnungen haben nirgendwo ausgenutzt, daß wir die nichtparametrische Minimalflächengleichung in nur 2 Dimensionen betrachten. Unser Ergebnis gilt wörtlich für Lösungen $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von

$$\operatorname{div}\left(\nabla f \big/ \sqrt{1+|\nabla f|^2}\right) = 0$$

auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

2) Ist der Definitionsbereich Ω unbeschränkt und/oder sind die Lösungen f, g der nichtparametrischen nicht stetig bis zum Rand $\partial\Omega$, so zeigt das Ausschöpfungsargument $(D \uparrow \Omega)$ immerhin noch das folgende